

مدیریت واکاوی و اثبات حدس کولاتز، از مسائل حل نشده در نظریه اعداد

ملیکا جزایری^۱

۱- دانشگاه صنعتی شریف پردیس بین الملل جزیره کیش

چکیده

هدف از نوشتن این مقاله اثبات کردن یکی از مسائل حل نشده ریاضی به اسم حدس کولاتز می باشد. حدسی که در عین پیچیدگی، راه حل ساده ای دارد و ۸۴ سال در ابهام بوده. جذابیت این حدس زمانی دو چندان می شود که متوجه شوید این حدس حتی برای دانش آموزان هم قابل فهم است اما اثبات آن حتی برای دانشمندان و ریاضیدانان هم دشوار می باشد همانطور که سدریک ویلانی برنده جایزه فیلیز ریاضیات در سال ۲۰۱۰ درمورد این حدس می گوید که مغزش برای پیگیری و حل این مسئله کوچک است!

مسئله قابل توجه در این حدس این است که هر عددی در این حدس قرار بگیرد، در نهایت تمامی آنها به یک جواب واحد یعنی عدد یک می رسند و این امر باعث شده تا این حدس برای ریاضیدانان و علاقه مندان به ریاضی جذاب باشد. مقاله حاضر به توضیح کامل و اثبات این حدس پیچیده می پردازد. اثبات این حدس با تمرکز بر روی چگونگی افزایش و کاهش اعداد درون مدار کولاتز اعداد مختلف حاصل شده است.

واژگان کلیدی: مسائل ریاضی، مسائل حل نشده ریاضی، ریاضی، حدس کولاتز، اثبات حدس کولاتز، لوتار کولاتز، نظریه اعداد.

۱- مقدمه

در این مقاله به بررسی حدس کولاتز و اثبات آن می پردازیم.

در سال ۱۹۳۷ ریاضیدان آلمانی لوتار کولاتز متوجه رابطه ای در اعداد صحیح شد و این رابطه به افتخار او حدس کولاتز نامیده شد. حدسی که ذهن ریاضی دانان زیادی را به خود مشغول کرد و با گذشت ۸۴ سال هنوز یکی از مسائل حل نشده ی دنیای ریاضیات است، همچنین حدس کولاتز به دلیل اینکه یکی از دو قانون حاکم بر آن " $1+n^3$ " میباشد، به حدس " $1+n^3$ " نیز مشهور است. ریاضیدانان زیادی تلاش کردند تا آنرا اثبات یا با یافتن مثال نقض، آنرا رد کنند. ریاضی دانان حتی از رایانه ها برای یافتن مثال نقض این حدس استفاده کرده اند ، اما تاکنون هیچ مثال نقضی برای این حدس نیافته اند.

هدف از ارائه این مقاله اثبات حدس کولاتز و بررسی دلیل این رابطه در اعداد صحیح میباشد. در ابتدای مقاله به توضیح این حدس می پردازیم و سپس آنرا اثبات می کنیم. باشد که این مقاله گامی در راه پیشرفت علم ریاضی باشد.

۲- ادبیات نظری تحقیق

۱- واکاوی و بررسی حدس کولاتز

۱. پیدایش حدس کولاتز

در دنیای ریاضیات مسئله هایی وجود دارند که حل نشده باقی مانده اند. بعضی از این مسائل آنقدر پیچیده هستند که حتی فهمیدن آنها نیاز به زمان و انرژی زیادی دارد. ولی برخی دیگر از این مسائل بسیار ساده بوده و پیش نیاز چندانی ندارند. یکی از این مسائل حدس کولاتز " $conjecture\ latzCol$ " می باشد که برای بیان این حدس به چیزی غیر از چهار عمل اصلی (جمع، ضرب، تقسیم و تفریق) نیاز نداریم. در سال ۱۹۳۷ ریاضیدان آلمانی لوتار کولاتز متوجه رابطه ای در اعداد صحیح شد و این رابطه به افتخار او حدس کولاتز نامیده شد. این حدس همچنین به عنوان حدس " $1+n^3$ " نیز شناخته می شود. این گونه حدس ها می پرسند که آیا یک رشته ی خاص از اعداد، صرف نظر از اینکه چه عددی را به عنوان عدد اولیه انتخاب می کنیم ، همیشه به یک صورت تمام می شوند.

۲. بیان مشکل

عملیات زیر را در مجموعه اعداد صحیح مثبت اختیاری در نظر بگیرید.

قاعده ۱- اگر عدد زوج بود ، آنرا بر ۲ تقسیم کنید.

قاعده ۲- اگر عدد فرد بود ، آنرا ۳ برابر کنید و با ۱ جمع کنید.

و این کار را تا جایی که امکان دارد ادامه دهید. یک مثال ساده برای شروع بسیار مفید است.

عدد ۶ را در نظر بگیرید. ۶ زوج است، پس آنرا بر ۲ تقسیم می‌کنیم. حاصل برابر است با ۳. عدد ۳ فرد است، پس آنرا ضربدر ۳ کرده و با ۱ جمع می‌کنیم $1+3 \times 3$. دوباره به یک عدد زوج برمی‌خوریم، باز هم قاعده ۱ را برای آن بکار می‌بریم. اگر همچنان این کار را ادامه دهیم و قواعد ۱ و ۲ را در مورد اعداد به دست آمده به کار ببریم به اعداد زیر می‌رسیم.

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

به عنوان یک مثال دیگر عدد ۱۹ را در نظر بگیرید، با به کار بردن قواعد کولاتز به اعداد زیر می‌رسیم:

$$19 \rightarrow 58 \rightarrow 29 \rightarrow 88 \rightarrow 44 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow$$

$$40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

نکته مشترک دو مثال بالا آن است که در مورد هر دوی آنها، بعد از تعدادی ضرب و جمع و تقسیم به اعداد ۲، ۴ و ۱ می‌رسیم و بعد از آن فقط همین اعداد تکرار می‌شوند.

اگر بخواهیم این عملیات را به صورت تابعی ریاضی نشان دهیم به صورت زیر خواهد بود:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 3n + 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

دنباله بازگشتی زیر را تعریف می‌کنیم n حال برای عدد دلخواه:

$$a_0 = n, a_1 = f(a_0) = f(n), a_2 = f(a_1) = f(f(n)), \dots, a_i = f(a_{i-1}), \dots$$

بیان حدس کولاتز با استفاده از دنباله بازگشتی بالا، اینگونه است. یکی از اعضای دنباله آن ۱ است n به ازای هر عدد طبیعی مانند کوچکترین عدد i را که a_i مساوی یک باشد را زمان توقف عدد n می‌گویند. مثلاً زمان توقف عدد ۶ برابر با ۷ است و زمان توقف ۱۹ برابر با ۱۹ است.

۳. حدس کولاتز و ریاضی‌دانان

ریاضی‌دانان بسیاری سعی کردند تا این حدس را اثبات یا رد کنند، اما اکثر این تلاش‌ها بی نتیجه بود. بنابراین بعضی از آن‌ها تصمیم گرفتند تا با استفاده از رایانه دنباله‌های اعداد مختلف را حساب کنند تا شاید بتوانند عددی

پیدا کنند که در حدس کولاتز صدق نکند. البته تاکنون این تلاش‌ها نیز بی ثمر بوده است. زیرا دنباله همه اعدادی که تا به حال محاسبه شده شامل ۱ است، یعنی در حدس کولاتز صدق می‌کند.

یک مثال بسیار ساده برای آنکه ببینیم این حدس چندان هم ساده نیست، عدد ۲۷ است. سعی کنید تا دنباله این عدد را محاسبه کنید. این کار زمان و انرژی زیادی از شما خواهد گرفت، زیرا برای رسیدن به اولین عدد ۱ در دنباله این عدد باید ۱۱۱ مرحله محاسبه کنید. نکته جالب توجه در مورد ۲۷ این است که دنباله این عدد تا ۹۲۳۲ بالا می‌رود و سپس با سیری تقریباً نزولی به ۱ می‌رسد.

در حال حاضر این حدس تا حدود عدد دو به توان شصت ضرب در ده توسط کامپیوتر امتحان شده است و جواب مثبت بوده است. البته این عدد فوق بزرگ هم برای اثبات این حدس کفایت نمی‌کند و باید یک استدلال کلی در مورد همه اعداد برای آن یافت شود، چون در تاریخ ریاضیات حدس‌های دیگری هم بودند که مثال نقض آنها برای اعداد خیلی بزرگ پیدا شده است.

یکی از نکات جالب این حدس آن است که بزرگتر شدن عدد انتخابی دلیلی بر طولانی شدن مدار کولاتز (مراحل رسیدن به یک) نیست. برای مثال:

عدد ۳۲ - بعد از ۵ مرحله به عدد ۱ می‌رسد.

و عدد ۷ - بعد از ۱۶ مرحله به عدد ۱ می‌رسد.

و این نکته برای ریاضی‌دانان بسیار عجیب است، چون هیچ الگو و دلیلی برای این حدس نیافتند. ریاضیدانان نمی‌دانند چرا اینگونه می‌شود، حتی وقتی این کار برای اعداد خیلی بزرگ به وسیله کامپیوتر انجام شده، باز هم به اعداد (۱، ۲، ۴) ختم شده است.

نظر دو ریاضیدان بزرگ جهان سدریک ویلانی و پاول اردوش در مورد این حدس اینگونه است:

سدریک ویلانی برنده جایزه فیلدز ریاضیات در سال ۲۰۱۰، در مورد حدس کولاتز می‌گوید که مغزش برای پیگیری و حل این مسئله کوچک است!

همچنین ریاضیدان برجسته پاول اردوش (۱۹۹۶-۱۹۱۳) در مورد این حدس گفت: ریاضیات ما هنوز آمادگی ندارد تا با چنین هیولایی رو به رو شود.

۴. حدس کولاتز و ورود کامپیوترها

در سال ۱۹۷۰ با ورود کامپیوترها به محاسبات ریاضی امیدواری برای یافتن عددی که حدس کولاتز را نقض کند، زیاد شد. اما تا به امروز تمامی اعداد تا دو به توان شصت ضرب در ده بررسی شده‌اند و همه‌ی آنها به عدد یک می‌رسند. طولانی‌ترین مدار کولاتز متعلق به عدد ۶۳۷۲۸۱۲۷ می‌باشد و ریاضیدانان ذوق زیادی داشتند که این عدد به یک نرسد، اما در نهایت بعد از ۹۴۹ مرحله به یک می‌رسد.

ریاضی‌دانان با کمک کامپیوتر و با کنار هم قرار دادن رشته‌ی اعداد (مدار کولاتز اعداد) شکل‌های جذابی را به وجود می‌آورند که معروف به درخت کولاتز است. مثلاً مدلهای جلبک دریایی، مدل مرجانی و مدل کهکشان‌ی از مدل‌های معروف نمایش مدار اعداد کولاتز می‌باشد.

اثبات حدس کولاتز

در حدس کولاتز صرف نظر از اینکه چه عددی به عنوان عدد اولیه انتخاب می‌شود، این روند همیشه به عدد یک می‌رسد و این اتفاقی نیست.

هر عدد انتخابی در حدس کولاتز، دارای مداری است که به آن مدار کولاتز می‌گویند و تمام آنها در نهایت به عدد یک ختم می‌شوند و دلیل آن برخی از توان‌های عدد ۲، یعنی توفان‌های زوج عدد ۲ می‌باشند.

اشتراک بین حدس کولاتز و توان‌های زوج عدد ۲

حدس کولاتز: در حدس کولاتز اگر عدد انتخابی یا عدد بدست آمده در مدار کولاتزی، فرد باشد، آنرا سه برابر می‌کنیم؛ یعنی عدد حاصل مضربی از عدد سه خواهد بود. سپس آنرا با یک جمع می‌کنیم تا حاصل عددی زوج شود.

توان‌های زوج عدد ۲: همچنین اگر یک واحد از توان‌های زوج عدد ۲ کم کنیم، عدد حاصل مضربی از عدد ۳ خواهد بود؛ یعنی قطعاً مضربی از عدد ۳ خواهد بود. چند مثال: $(2^{2k} - 1)$

$$2^2=4 \rightarrow 4-1=3$$

$$2^4=16 \rightarrow 16-1=15$$

$$2^8=256 \rightarrow 256-1=255$$

$$2^{10}=1024 \rightarrow 1024-1=1023$$

$$2^{18}=262144 \rightarrow 262144-1=262143$$

*همانطور که می‌دانید عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$2^{32}=4294967296 \rightarrow 4294967295 -1 = 4294967295 \rightarrow 4+2+9+4+9+6+7+2+9+5=57 \rightarrow 5+7=12$$

$$\rightarrow 1+2=3$$

این قضیه در مورد تمام توان‌های زوج عدد ۲ صدق می‌کند. پس نتیجه می‌شود:

$$2^{2k}-1=3n$$

,

$$2^{2k}=3n+1$$

۳- بحث و نتیجه گیری

با توجه به توضیحات ذکر شده، در حدس کولاتز اگر عدد انتخابی یکی از توان‌های عدد ۲ باشد، مدار کولاتز (2^n) آنها با تقسیم بر ۲، در نهایت بعد (n) مرتبه، به عدد یک می‌رسند. مثال:

$$2^9=512$$

$$512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

اما در مورد بقیه‌ی اعداد طبیعی یعنی $[N-2^n]$ ، در مدار کولاتز آنها شرط دوم حدس کولاتز نیز برقرار است که مربوط به اعداد فرد می‌باشد. بر اساس حدس کولاتز اعداد فرد باید $(3n+1)$ شوند که عدد حاصل قطعا یک عدد زوج خواهد شد. بنابراین مدار کولاتز عدد انتخابی آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا $(3n+1)$ برابر با یکی از توان‌های زوج عدد ۲ شود و در نهایت تنها با چند بار تقسیم بر ۲ کردن، به یک خواهیم رسید.

در نتیجه دلیل اینکه مدار کولاتز تمام اعداد، به عدد یک ختم می‌شوند این است که همیشه عدد قبل از توان‌های زوج عدد ۲ مضربی از ۳ می‌باشند و همچنین توان‌های عدد ۲ تنها با شرط اول به عدد یک می‌رسند.

۴-مراجع

۱. مجله رشد، ۱۳۹۵
۲. ویکی پدیا، ۱۳۹۹
۳. آپارات، امیرحسین منجمی. ۱۳۹۹